a) Montrer que : $V_{n+1} = V_n^2$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) Montrer que $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Montrer que $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_K}{n} \leq 1$$

Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $U_n = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p^2}\right)$

1°/ Calculer U_1 et U_2

2°/ Montrer que (U_n) est croissante

3°/ Montrer que

a) Pour tout $p \geq 2$: $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) En déduire que (U_n) est majorée

4°/ Montrer que (U_n) est convergente .

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

2°/ Etudier la monotonie de (u_n).

3°/ On pose $v_n = u_n^2$.